

Запиши число, тема: «Построение сечений многогранников методом следов»

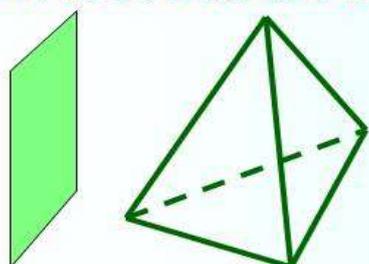
### Задачи на построение сечений.

**Определение.** Сечением поверхности геометрических тел называется - плоская фигура, полученная в результате пересечения тела плоскостью и содержащая точки, принадлежащие как поверхности тела, так и секущей плоскости.

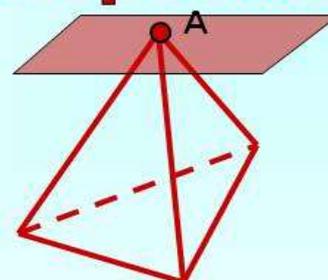
### Взаимное расположение многогранника и секущей плоскости:

1. Многогранник и плоскость не имеют общих точек.
2. Многогранник и плоскость имеют одну общую точку-вершину многогранника.
3. Многогранник и плоскость имеют общую грань.
4. Многогранник и плоскость имеют общий отрезок-ребро многогранника.

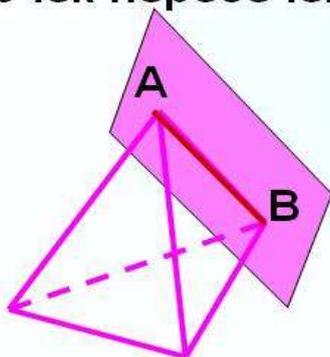
## Взаимное расположение плоскости и многогранника



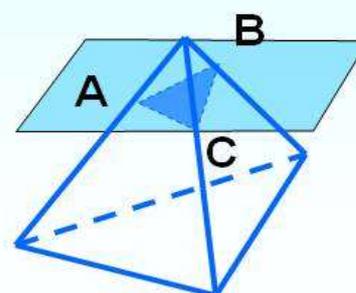
Нет точек пересечения



Одна точка пересечения



Пересечением является отрезок



Пересечением является плоскость

### Виды сечений:

- сечение параллельное плоскости основания,
- диагональное сечение,
- сечение, параллельное плоскости грани,

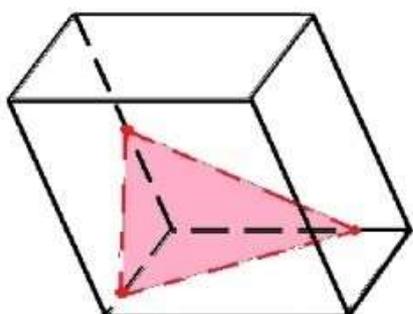
- произвольное сечение.

**Фигуры, которые получаются в результате сечения:**

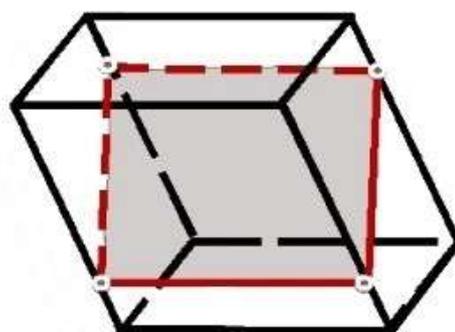
- 1. треугольник;
  2. четырехугольник;
  3. пятиугольник;
  4. шестиугольник.

## Виды сечений параллелепипеда

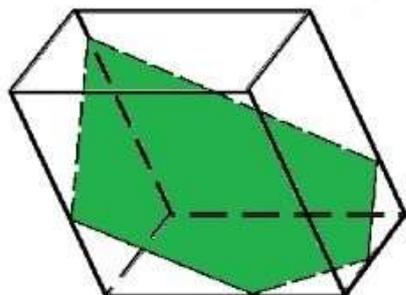
Сечение треугольник



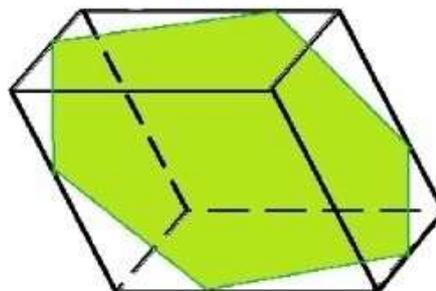
Сечение четырехугольник



Сечение пятиугольник



Сечение шестиугольник





## Рисунок 8 –чертеж к задаче №1

1. Построим след секущей плоскости на плоскость нижнего основания параллелепипеда. Рассмотрим грань  $AA_1B_1B$ . В этой грани лежат точки сечения  $P$  и  $Q$ . Проведем прямую  $PQ$ .
2. Продолжим прямую  $PQ$ , которая принадлежит сечению, до пересечения с прямой  $AB$ . Получим точку  $S_1$ , принадлежащую следу.
3. Аналогично получаем точку  $S_2$  пересечением прямых  $QR$  и  $BC$ .
4. Прямая  $S_1S_2$  - след секущей плоскости на плоскость нижнего основания параллелепипеда.
5. Прямая  $S_1S_2$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $U$ , сторону  $CD$  в точке  $T$ . Соединим точки  $P$  и  $U$ , так как они лежат в одной плоскости грани  $AA_1D_1D$ . Аналогично получаем  $TU$  и  $RT$ .
6.  $PQRTU$  – искомое сечение.

### Основные правила построения сечений методом следа:

- Если даны (или уже построены) две точки плоскости сечения на одной грани многогранника, то след сечения этой плоскости – прямая, проходящая через эти три точки.
- Если дана (или уже построена) прямая пересечения плоскости сечения с основанием многогранника (след на основании) и есть точка, принадлежащая определенной боковой грани, то нужно определить точку пересечения данного следа с этой боковой гранью ( точка пересечения данного следа с общей прямой основания и данной боковой грани)
- Точку пересечения плоскости сечения с основанием можно определить как точку пересечения какой-либо прямой в плоскости сечения с ее проекцией на плоскость основания.

То есть, суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры. Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры.

### Задача №2.

Дан тетраэдр  $ABCD$ . Точка  $M$  – точка внутренняя, точка грани тетраэдра  $ABD$ .  $N$  – внутренняя точка отрезка  $DC$ . Построить точку пересечения прямой  $NM$  и плоскости  $ABC$ .

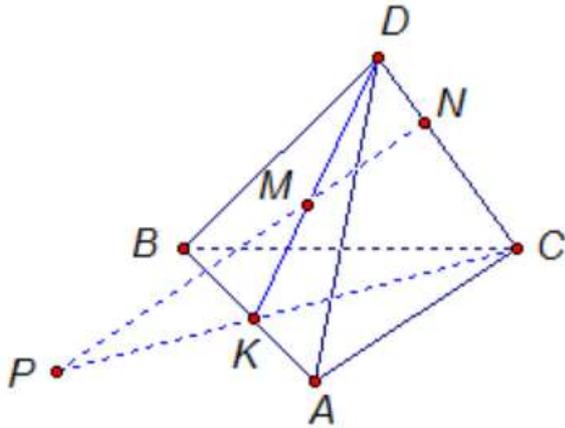


Рисунок 9 – чертеж к задаче №2

**Решение:**

Для решения построим вспомогательную плоскость DMN (рис. 10). Пусть прямая DM пересекает прямую AB в точке K. Тогда, СКD – это сечение плоскости DMN и тетраэдра. В плоскости DMN лежит и прямая NM, и полученная прямая СК. Значит, если NM не параллельна СК, то они пересекутся в некоторой точке Р. Точка Р и будет искомая точка пересечения прямой NM и плоскости ABC.

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

**Пример 1.**

Дан тетраэдр ABCD. М – внутренняя точка грани ABD. Р – внутренняя точка грани ABC. N – внутренняя точка ребра DC. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки М, N и Р.

**Решение:**

Рассмотрим первый случай, когда прямая MN не параллельна плоскости ABC (рис. 11). В прошлой задаче мы нашли точку пересечения прямой MN и плоскости ABC. Это точка К, она получена с помощью вспомогательной плоскости DMN, т.е. мы проводим DM и получаем точку F. Проводим CF и на пересечении MN получаем точку К.

Проведем прямую КР. Прямая КР лежит и в плоскости сечения, и в плоскости ABC. Получаем точки Р<sub>1</sub> и Р<sub>2</sub>. Соединяем Р<sub>1</sub> и М и на продолжении получаем точку М<sub>1</sub>. Соединяем точку Р<sub>2</sub> и N. В результате получаем искомое сечение Р<sub>1</sub>Р<sub>2</sub>М<sub>1</sub>. Задача в первом случае решена.

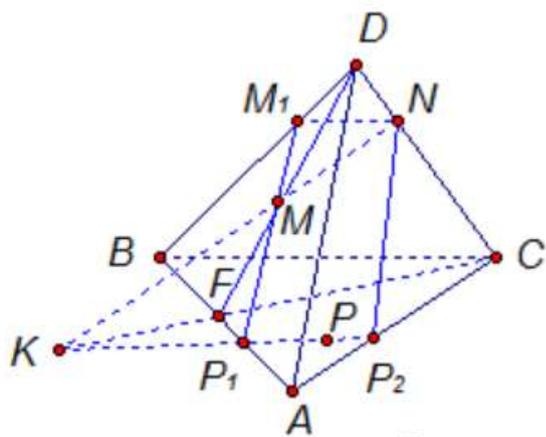


Рисунок 10 – чертеж к примеру 1 (первый случай)

Рассмотрим второй случай, когда прямая  $MN$  параллельна плоскости  $ABC$  (рис. 12). Плоскость  $MNP$  проходит через прямую  $MN$  параллельную плоскости  $ABC$  и пересекает плоскость  $ABC$  по некоторой прямой  $P_1P_2$ , тогда прямая  $P_1P_2$  параллельна данной прямой  $MN$ .

Теперь проведем прямую  $P_1M$  и получим точку  $M_1$ .  $P_1P_2NM_1$  – искомое сечение.

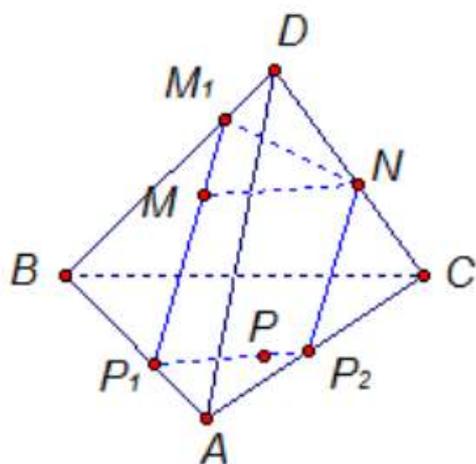


Рисунок 11 – чертеж к примеру 1 (второй случай)

### Пример 2.

Через середины ребер  $AB$  и  $BC$  тетраэдра  $SABC$  проведена плоскость параллельно ребру  $SB$ . Докажите, что эта плоскость пересекает грани  $SAB$  и  $SBC$  по параллельным прямым.

### Доказательство

Плоскость  $SBC$  и плоскость, проходящая через прямую  $MN$  параллельно ребру  $SB$ , пересекаются по прямой, проходящей через точку  $N$  (рис. 13).

По теореме (о параллельных прямых) линия пересечения параллельна  $SB$ .

В плоскость  $SBC$  через т.  $N$  проходит  $NQ \parallel SB$ .

Плоскость  $SAB$  и плоскость  $MNQ$  пересекаются по прямой, проходящей через т.  $M$  (прямая  $MP$ ). По теореме (о параллельных прямых) линия пересечения параллельна  $SB$ .

$\begin{cases} PM \parallel SB \\ NQ \parallel SB \end{cases}$  следовательно,  $PM \parallel NQ$ . Утверждение доказано.

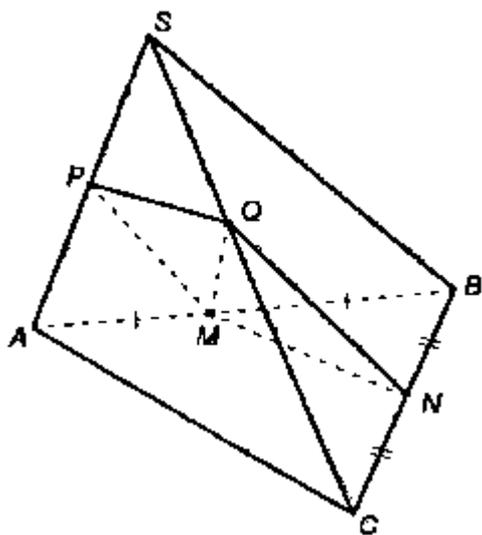


Рисунок 12 - чертеж к примеру 2

**Решите тренировочный тест:**

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/5444/train/221494/>

(В конце ответ сфотографировать, и прислать мне)

По учебнику прочитай п.14

Решите самостоятельно: №83-86, стр30.

Решения жду по ватсап, вайбер.